Matematika II. példatár
Összeállította: Dr. Fekete Árpád, főiskolai docens

A határozott integrál és alkalmazásai

I. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat a Newton-Leibniz tétel alkalmazásával! (Valamennyi integrál alapintegrálra vezethető vissza.)

1. $\int_1^3 (x^3 - 5x^2 + \frac{2}{3x} - \sqrt{x})dx$
2. $\int_{-2}^{-1} (\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^5})dx$
3. $\int_2^5 (\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6+x}{\sqrt[3]{x}})dx$
4. $\int_0^{\pi} (1 + 2\cos x)dx$
5. $\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}dx$
6. $\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$
7. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx$
8. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
9. $\int_1^2 (3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x)dx$
10. $\int_2^5 \frac{x}{(x-1)(x+3)}dx$

II. A helyettesítés módszerét alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

Mintafeladat.

$$\int_0^1 x^3(1+x^4)^3 dx$$

Megoldás. Az $1 + x^4$ tagot helyettesítjük y-nal. Ekkor $dy = 4x^3dx$. Ebből fejezzük ki x^3dx-et, $x^3dx = \frac{dy}{4}$. Helyettesítés után a határok megváltoznak, az új határok: $1 + 0^4 = 1$ és $1 + 1^4 = 2$. Így kapjuk:

$$\int_0^1 x^3(1+x^4)^3 dx = \int_1^2 y^3 \frac{dy}{4} = \frac{1}{4}\left[\frac{y^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{16}(16-1) = \frac{15}{16}.$$

1. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$
2. $\int_0^1 \frac{5x}{(4+x^2)^2}dx$
3. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$
4. $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}dx$
5. $\int_1^3 \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx$
6. $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{4+5e^x}dx$
7. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x dx$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

11. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
12. $\int_0^1 x \cdot 2^{-x^2+1} dx$
13. $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$
14. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} dx$
15• $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

III. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

Mintafeladat.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Megoldás. A parciális integrálás szabályát alkalmazva ($\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$) legyen $f' := x^{-2}$ és $g := \ln x$. Ezekből $f = -x^{-1}$ és $g' = \frac{1}{x}$. Így kapjuk:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e x^{-2} dx = -\frac{\ln e}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = 1 - \frac{2}{e}$$

1. $\int_1^{e^2} x^3 \ln x dx$
2. $\int_3^7 \ln x dx$
3. $\int_0^2 x e^{-x} dx$
4. $\int_0^\pi x \cos x dx$
5. $\int_{-\pi}^\pi x^2 \sin x dx$
6. $\int_0^1 \arctan x dx$
7. $\int_1^e \ln^2 x dx$
8. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$
9. $\int_0^1 \arccos x dx$
10. $\int_0^3 (x^3 - 1) e^x dx$

IV. Határozzuk meg a következő függvények "görbe alatti" területét az adott intervallumon! Készítsünk vázlatos ábrát is!

1. $f(x) = 6 - x - x^2$ $[0, 3]$
2. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ $[-1, 2]$
3. $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$ $[2, 6]$
4. $f(x) = \ln x$ $[\frac{1}{e}, e]$
5. $f(x) = \arctan x$ $[1, 3]$
6. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $[3, 5]$
7. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $[2, \infty)$ (improprius!)
8. $f(x) = e^{\frac{-x}{2}}$ $[0, \infty)$ (improprius!)

9. $f(x) = \frac{2}{3x+5}$ $\quad [0, \infty)$ (improprius!)
10. $f(x) = \frac{3}{e^x}$ $\quad (-\infty, \infty)$ (improprius!)
11. $f(x) = \frac{1}{x-3} - 2$ $\quad (3, \frac{7}{2}]$ (improprius!)
12. $f(x) = 4xe^{-x^2}$ $\quad [0, \infty)$ (improprius!)
13. $f(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ $\quad [0, 2]$ (improprius!)
14. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $\quad [1, \infty)$ (improprius!)
15. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad (-\infty, \infty)$ (improprius!)
16. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad (0, 1]$ (improprius!)
17. $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$ $\quad (-\infty, 2]$ (improprius!)
18. $f(x) = x \ln x$ $\quad (0, 1]$ (improprius!)
19. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ $\quad [0, 4)$ (improprius!)
20. $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ $\quad [0, \infty)$ (improprius!)

Differenciálegyenletek

I. Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú diff. egyenleteket:

1. $(1 + x^2)y' = 2xy, \qquad y(2) = 10$
2. $xy' - y = 0, \qquad y(-2) = 4$
3. $yy' + x = 0, \qquad y(-2) = 4$
4. $y' = 4x\sqrt{y}, \qquad y(1) = 1$
5. $y - 2 + (x + 3)y' = 0$
6. $(1 - x^2)dy + xydx = 0$
7. $x(y^2 - 1)dx - (4 - x)dy = 0$
8. $x(y - 3)dy = 4ydx$
9. $y' = (\tan x)\tan y$
10. $y' = 2^{x-y}$
11. $xydx + (x + 1)dy = 0$
12. $y = y' \ln y, \qquad y(2) = 1$
13. $xydx + (1 + x^2)dy = 0$
14. $y' - xy^2 = 2xy$
15. $yy' + xe^y = 0, \qquad y(1) = 0$
16. $y' = y^2 - 8y + 12$
17. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$
18. $(2x + 1)y' - 3y = 0, \qquad y(0) = 5$
19. $y' \cot x + y = 2, \qquad y(0) = -1$
20. $y' \sin^2 x - y \ln y = 0$

Szöveges feladatok

1. Egy lábasban 80C fok hőmérsékletű víz van. Kitesszük az erkélyre hűlni; 30 s múlva 40C fok, 60 s múlva 20C fok a víz hőmérséklete. Állapítsuk meg a külső levegő hőmérsékletét!
2. A vasalóprésből kivett ruhadarab 100C fokról 60C fokra 10 perc alatt hűl le. A terem hőmérséklete 20C fok. Hány perc alatt hűl le a ruhadarab 25C fokra?
3. A kemencéből kikerülő kenyér hőmérséklete 30 perc alatt a kezdeti 120C fokról 60C fokra csökken. A levegő hőmérséklete a tárolóban 30C fok. A hűlés kezdetétől számítva mennyi idő alatt csökken a kenyér hőmérséklete 40C fokra?
4. Egy település lakosainak száma 50 év alatt megduplázódik. Hány év alatt háromszorozódik meg a lakosság, ha a szaporodás üteme változatlan?
5. A rádium bomlási sebessége minden időpillanatban egyenesen arányos a jelen lévő tömegével. Határozzuk meg, hogy az m_0 tömegű rádium hány százaléka bomlik el 100 év alatt, ha tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1590 év?

II. Oldjuk meg a következő elsőrendű differenciálegyenleteket az állandó variálásának módszerével!

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$
2. $y' \sin x - y \cos x = -1$
3. $(x-2)y' - y = 2(x-2)^3$
4. $y' + 2xy = 4x$
5. $xy' + x^2 + xy - y = 0$
6. $xy' + xy + y = 3x$
7. $y' = 2x(x^2 + y)$
8. $y' + x^2 y - x^2 = 0 \qquad y(2) = 1$
9. $x(x-1)y' - y = x(x-1)$
10. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
11. $xy' - 2y = (x-2)e^x$
12. $xy' \ln x + y = \ln x$
13. $xy' + y = \ln^2 x$
14. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$
15. $y' - y \tan x = \cos^2 x$

III. Oldjuk meg a következő elsőrendű differenciálegyenleteket a próbafüggvény módszerével!

1. $y' - y = x$
2. $y' - 4y = 8x^3 - 3x + 1$
3. $2y' - y = \sin 2x$
4. $y' - 2y = 3e^{2x} \qquad$ (rezonancia!)

5. $y' - y = 3e^{4x} + \cos x$
6. $y' + 3y = \cos x + 6$
7. $y' - y = x^2 + 2x + 1$
8. $y' + 5y = 3x - 6$
9. $y' - y = \cosh x$
10. $\frac{di}{dt} - 6i = 10 \sin 2t$

IV. Oldjuk meg a következő hiányos másodrendű differenciálegyenleteket!

Sima kétszeri integrálás:

1. $y'' = x^2 - \sin x$
2. $y'' = \frac{1}{x} \qquad y(1) = 0, \qquad y'(1) = 0$
3. $(1 + \sin x)^2 y'' + \cos x = 0$
4. $y''(x^2 + x)^2 + 2x + 1 = 0$

$p := y', \ p' := y''$ helyettesítés:

5. $2y'' - y'^2 + 4 = 0$
6. $xy'' - y' = x^3$
7. $x^2 y'' = y'^2$
8. $2y'' = 2xy' - 3$
9. $2xy'y'' = y'^2 - 1$
10. $y''(x^2 + 1) = 2xy', \qquad y(0) = 1, \ y'(0) = 3$

V. Oldjuk meg a következő homogén másodrendű differenciálegyenleteket!

1. $y'' - y' - 6y = 0$
2. $y'' - 8y' + 16y = 0$
3. $4y'' + 4y' + 37y = 0$
4. $y'' + 2y' - 15y = 0$
5. $9y'' + 24y' + 16y = 0$
6. $y'' + 4y' + 9y = 0$

VI. Oldjuk meg a következő másodrendű differenciálegyenleteket a próbafüggvény módszerével!

1. $y'' + 5y' + 4y = -x^2 - 2x + 3$
2. $y'' - 6y' + 13y = x + \sin 3x$
3. $y'' + 4y = 3 \sin x - 6 \cos x$
4. $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23$
5. $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$
6. $y'' - 2y' + y = x^2 + 4e^{3x}$

7. $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x} + 10x + 1$
8. $y'' - 5y' + 6y = 2$
9. $y'' + 5y' + 6y = 12x$
10. $9y'' - 12y' + 4y = 4x^3$

VÉGTELEN SOROK

I. Állapítsuk meg a következő mértani sorok összegét!

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+3}}{5^n}$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$$

4. $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n} \right)$$

5. Írjuk fel a megadott tizedes törtet két egész szám hányadosaként:

$$0,363636363636.....$$

6. Írjuk fel a megadott tizedes törtet két egész szám hányadosaként:

$$0,234234234234234....$$

II. A részletösszegek egyszerűsítésével határozzuk meg a sorok összegét:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-6}$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2-1}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

III. Valamely konvergencia-kritérium segítségével döntsük el az alábbi végtelen sorok konvergenciáját!

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$$

3.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

4.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln}{\sqrt{n}}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3-1}$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$$

11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{4^n}$$

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$$

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$$

14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$$

15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$$

16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n-2}\right)^{n^2}$$

17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

IV. Konvergensek-e az alábbi alternáló sorok? Vizsgáljuk meg az abszolút konvergenciát is!

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$$

3.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{0.1^n}{n}$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2}$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+3}$$

V. Adjuk meg az alábbi sorok konvergenciaintervallumát! Az intervallum végpontjaiban is vizsgáljuk meg a konvergenciát!

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n}$$

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{10^n}$$

3.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n+2}$$

4.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$$

6.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

7.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

8.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$$

9.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$$

10.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

11.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{4^n(n^2+1)}$$

12.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{3^n}$$

13.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$$

14.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

15.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln n) x^n$$

VI. Írjuk fel az alábbi függvények Taylor-sorát a megadott pontban!

1. $f(x) = \ln x, \qquad a = 1$
2. $f(x) = \ln(x+1), \qquad a = 0$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \qquad a = 2$
4. $f(x) = \sin x, \qquad a = \frac{\pi}{4}$
5. $f(x) = \arctan x, \qquad a = 0$
6. $f(x) = \sqrt{x+4}, \qquad a = 0$
7. $f(x) = \cosh x, \qquad a = 0$
8. $f(x) = 2^x, \qquad a = 1$

VII. Számítsuk ki az alábbi integrálok közelítő értékét:

1.
$$\int_0^{0.2} \sin x^2 dx$$

2.
$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx$$

3.
$$\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx$$

4.
$$\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx$$

5.
$$\int_0^{0.25} \sqrt[3]{1+x^2} dx$$

VII. Határozzuk meg a következő feladatokban megadott 2π szerint periodikus függvények ($x \in R$) Fourier-sorát!

1. $f(x) = |x|$, ha $-\pi < x \leq \pi$
2. $f(x) = x^2$, ha $-\pi < x \leq \pi$
3. $f(x) = |\sin x|$, ha $-\pi < x \leq \pi$
4. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$
5. $f(x) = e^x$, ha $0 \leq x \leq 2\pi$

KÉTVÁlTOZÓS FÜGGVÉNYEK

I. Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

1. $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
2. $f(x,y) = \arcsin(y - x)$
3. $f(x,y) = \ln(x + y)$
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 16}$
5. $f(x,y) = \ln\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

II. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

1.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$$

2.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

3.
$$\lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x}$$

4.
$$\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x-y-1}$$

5.
$$\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$$

6.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + x^2y + y^2}{x^4+y^2}$$

7.
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3y^3 - 1}{xy-1}$$

8.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}$$

III. Határozzuk meg az f'_x és f'_y parciális deriváltakat!

1. $f = x^6 - 4x^6y - 5xy^6$
2. $f = (x^3 - 2x^2y + y^2)^7$
3. $f = e^{x^2+y^2-1}$
4. $f = xe^{-\sqrt{2x-y}}$
5. $f = xy\cos(x^2y^2)$
6. $f = \sqrt{x^2y^5 - 1}$
7. $f = \arcsin\frac{x}{y}$
8. $f = \frac{x^2+3xy-1}{y^2+3xy-1}$
9. $f = 2^{\frac{-x}{y}}$
10. $f = (x^2+y^2)^{\lg x}$ (logaritmikus deriválás!)

IV. Számítsuk ki az f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} és f''_{yx} másodrendű parciális deriváltakat!

1. $f = \frac{x-y}{x+y}$
2. $f = \sin x \cos y$
3. $f = \frac{1}{x^2+y^2}$
4. $f = \ln\frac{x+y}{x-y}$
5. $f = x^4 + x^2y^2 - 3\cos(x^2y^2)$
6. $f = e^{\frac{y}{x}}$
7. $f = y^2\ln\sqrt{xy}$

V. Határozzuk meg az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban!

1. $z = \sqrt{x^2 - 2y^2},\ P_0(3,2)$
2. $z = \cos(x - 2y),\ P_0(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$
3. $z = x\cos y - ye^x,\ P_0(0,0)$
4. $z = \ln(x^2 + y^2),\ P_0(1,0)$
5. $z = e^{-(x^2+y^2)},\ P_0(0,0)$

VI. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, E irányban! Az irányt az α irányszögű egyenes is megadhatja.

1. $f(x,y) = 2xy - 3y^2,\ P_0(5,5),\ E(4,3)$
2. $f(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x-y)},\ P_0(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}),\ E(-\sqrt{3}, -1)$
3. $f(x,y) = \lg \sqrt[3]{2xy + y^2} + y^x,\ P_0(0,1),\ E(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
4. $f(x,y) = \ln x^2 y + \ln \frac{x^2}{y},\ P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ E(-1,1)$
5. $f(x,y) = \sqrt{x^3 y + xy^2},\ P_0(1,3),\ E(1,1)$
6. $f(x,y) = e^{x^2+y} + \ln\sqrt{x+y},\ P_0(1,0),\ \alpha = 315^0$
7. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y^4 - xy^2},\ P_0(2,1),\ \alpha = 120^0$
8. $f(x,y) = e^{x^2 y^2},\ P_0(1,1),\ \alpha = 60^0$
9. $f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{x-y},\ P_0(1,2),\ \alpha = 120^0$
10. $f(x,y) = \ln\sqrt{2x^2 + y^2},\ P_0(1, -2\sqrt{3}),\ \alpha = 225^0$

VII. Adjuk meg a következő függvények lokális szélsőértékeit!

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1$
2. $f(x,y) = 2 + 2x + 4y - x^2 - y^2$
3. $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$
4. $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$
5. $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
6. $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$
7. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$
8. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$
9. $f(x,y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$
10. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$
11. $f(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$
12. $f(x,y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$
13. $f(x,y) = \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{27}$
14. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
15. $f(x,y) = (3 - 2x + y)e^{-y^2}$

VIII. Határozzuk meg az adott függvény abszolút maximumát és minimumát a megadott feltételek mellett!

1. $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1, \quad x \geq 0,\ y \leq 2,\ y \geq 2x$
2. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1, \quad x \geq 0,\ y \leq 4,\ y \leq x$
3. $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad x \leq 0,\ y \leq 0,\ y \leq 2 - 2x$
4. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x, \quad 0 \leq x \leq 5,\ -3 \leq y \leq 3$
5. $f(x,y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2, \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$
6. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16, \quad y \geq -2,\ y \leq x,\ x \leq 2$

IX. Számítsuk ki az alábbi függvények kettős integrálját a megadott tartományon!

1. $f(x,y) = 4 - y^2, \quad T = \{0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$
2. $f(x,y) = x^2y - 2xy, \quad T = \{0 \leq x \leq 3,\ -2 \leq y \leq 0\}$
3. $f(x,y) = x + y + 1, \quad T = \{-1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 0\}$
4. $f(x,y) = \sin x + \cos y, \quad T = \{0 \leq x \leq \pi,\ \pi \leq y \leq 2\pi\}$
5. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2, \quad T = \{1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3\}$
6. $f(x,y) = 3y^2 - x, \quad T = \{x \geq 0,\ y \geq \frac{1}{2}x,\ y \leq 3 - x\}$
7. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 - y^2 + 8}, \quad T = \{x \geq 0,\ y \geq x,\ y \leq 2 - x\}$
8. $f(x,y) = x + 2xy, \quad T = \{y \leq x + 2,\ y \geq x^2\}$
9. $f(x,y) = x - 2y, \quad T = \{y \geq 0,\ y \leq 1 - x^2\}$
10. $f(x,y) = x + 2y, \quad T = \{y \leq 3 - x,\ y \geq (x-1)^2\}$

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Scharnitzky Viktor, Matematikai feladatok (a műszaki főiskolák számára)

[2] Scharnitzky Viktor, Differenciálegyenletek, /Bolyai sorozat/

[3] Denkinger Géza, Analízis gyakorlatok

[4] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano, Thomas-féle kalkulus 3.